

**В.Д. ДМИТРИЕНКО**, д-р тех. наук, проф., НТУ "ХПИ" (г. Харьков),  
**А.Ю. ЗАКОВОРОТНЫЙ**, ст. преподаватель, НТУ "ХПИ" (г. Харьков),  
**Н.В. МЕЗЕНЦЕВ**, ст. преподаватель, НТУ "ХПИ" (г. Харьков)

## **ЛИНЕАРИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДИЗЕЛЬ-ПОЕЗДА С ТЯГОВЫМ АСИНХРОННЫМ ПРИВОДОМ МЕТОДАМИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРАВЛЕНИЯ**

Рассматривается синтез линейной математической модели дизель-поезда с тяговым асинхронным приводом на основе динамической линеаризации модели объекта управления средствами геометрической теории управления. На основании последовательности инволютивных распределений получена линейная математическая модель в форме Бруновского. Приводится сравнение процессов в исходной и полученной линейной системе, которое подтверждает правильность выполненных преобразований. Ил.: 2. Библиогр.: 10.

**Ключевые слова:** линейная математическая модель, тяговый асинхронный привод, геометрическая теория управления, инволютивные распределения.

**Постановка проблемы и анализ литературы.** В современных условиях все более важное значение для железных дорог Украины приобретает снижение энергозатрат при перевозке грузов и пассажиров. Внедрение тяговых электроприводов с трехфазными асинхронными двигателями, которые по экономическим показателям превосходят приводы с двигателями на постоянном токе, – один из путей экономии энергоресурсов. Однако уменьшение потребления энергоресурсов возможно не только за счет внедрения более экономичных приводов, но и за счет оптимизации режимов управления подвижным составом. В связи с этим актуальны работы, направленные на создание новых экономических систем управления тяговым асинхронным приводом и на разработку систем поддержки принятия решений машинистом при управлении подвижным составом.

Теоретическими исследованиями, связанными с поиском оптимальных законов управления движением составов, занимались многие ученые [1 – 6], однако приемлемая по точности математическая модель тягового асинхронного двигателя содержит не менее пяти обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений. Как видно из [7, 8], синтез оптимальных регуляторов для таких нелинейных объектов с помощью большинства известных методов теории оптимального управления весьма затруднен или практически невозможен. В связи с этим в работах [6, 9] была предпринята попытка получить с помощью геометрической теории управления линейную модель объекта управления, эквивалентную исходной нелинейной модели привода, и с ее помощью выполнить синтез регулятора для электропривода. Однако в этих работах в математической модели объекта управления, в

качестве которого рассматривался отечественный дизель-поезд ДЭЛ-02, не учитывалось движение состава, но при управлении тяговым асинхронным приводом важно не только поведение привода, но и график движения и расстояние, проходимое составом за интервал времени управления. В связи с этим важно уточнение модели объекта управления для целей поиска оптимальных управлений с помощью этой модели.

**Целью статьи** является синтез уточненной линейной математической модели дизель-поезда с тяговым асинхронным приводом на основе динамической линеаризации модели объекта управления средствами геометрической теории управления.

Движение дизель-поезда по перегону может быть описано системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида:

$$\frac{dS}{dt} = k\Omega ; \quad (1)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = k_1 \mu \Psi_d i_q - a_{21}\Omega - a_{22}\Omega^2 ; \quad (2)$$

$$\frac{d\Psi_d}{dt} = -\alpha\Psi_d + \alpha L_m i_d ; \quad (3)$$

$$\frac{di_d}{dt} = -\gamma i_d + p\Omega i_q + \alpha L_m \frac{i_q^2}{\Psi_d} + \alpha\beta\Psi_d + \frac{1}{\sigma L_s} u_d ; \quad (4)$$

$$\frac{di_q}{dt} = -\gamma i_q - p\Omega i_d - \alpha L_m \frac{i_d i_q}{\Psi_d} - p\beta\Omega\Psi_d + \frac{1}{\sigma L_s} u_q ; \quad (5)$$

$$\frac{d\rho}{dt} = p\Omega + \alpha L_m \frac{i_q}{\Psi_d} , \quad (6)$$

где  $S$  – расстояние, отсчитываемое от начала перегона;  $t$  – время;  $k, k_1, a_{21}, a_{22}$  – постоянные коэффициенты;  $\Omega$  – угловая скорость вращения эквивалентного асинхронного двигателя;  $\Omega k = V$  – скорость движения дизель-поезда;  $\mu = pL_m/JL_r$ ;  $p$  – число пар полюсов статора двигателя;  $L_m$  – индуктивность контура намагничивания;  $J$  – момент инерции, приведенный к валу двигателя;  $L_r$  – полная индуктивность ротора;  $\Psi_d = \sqrt{\Psi_{ur}^2 + \Psi_{vr}^2}$  – потокосцепление ротора двигателя;  $\Psi_{ur}, \Psi_{vr}$  – потокосцепления ротора двигателя по осям  $u$  и  $v$ ;  $i_q = i_{vs} \cos\rho - i_{us} \sin\rho$  – ток статора по оси  $q$  в системе координат  $d, q$ ;  $i_{vs}, i_{us}$  – статорные токи по осям  $u$  и  $v$ ;  $\rho = \arcsin\left(\Psi_{vr}/\sqrt{\Psi_{ur}^2 + \Psi_{vr}^2}\right)$  или  $\rho = \arccos\left(\Psi_{ur}/\sqrt{\Psi_{ur}^2 + \Psi_{vr}^2}\right)$ ;  $\alpha = 1/T_r$ ;  $T_r$  –

постоянная времени ротора двигателя;  $i_d = i_{us} \cos \rho - i_{vs} \sin \rho$  – ток статора по оси  $d$  в системе координат  $d, q$ ;  $\gamma = \frac{R_r I_m^2}{\sigma L_s L_r^2} + \frac{R_s}{\sigma L_s}$ ;  $\sigma$  – полный коэффициент рассеяния;  $L_s$  – полная индуктивность статора;  $\beta = L_m / (\sigma L_s L_r)$ ;  $u_d = u_{us} \cos \rho + u_{vs} \sin \rho$ ;  $u_q = u_{vs} \cos \rho + u_{us} \sin \rho$ .

Введем в правые части уравнений (4), (5) объекта управления новые управления

$$u_1 = p\Omega i_q + \alpha L_m i_q^2 / \Psi_d + \alpha \beta \Psi_d + u_d / (\sigma L_s); \quad (7)$$

$$u_2 = -p\Omega i_d - \alpha L_m i_d i_q / \Psi_d - p\beta \Omega \Psi_d + u_q / (\sigma L_s). \quad (8)$$

Обозначив  $x_1 = S$ ;  $x_2 = \Omega$ ;  $x_3 = \Psi_d$ ;  $x_4 = i_d$ ;  $x_5 = i_q$ ;  $x_6 = \rho$ ;  $a_{12} = k$ ;  $a_{22} = -a_{21}$ ;  $a_{222} = -a_{22}$ ;  $a_{235} = k_1 \mu$ ;  $a_{33} = -\alpha$ ;  $a_{34} = \alpha L_m$ ;  $a_{44} = -\gamma$ ;  $a_{55} = -\gamma$ ;  $a_{62} = p$ ;  $a_{635} = \alpha L_m$  и подставив управления (7), (8) в уравнения (4), (5) получим следующую модель движения дизель-поезда по перегону:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= a_{12} x_2; \\ \frac{dx_2}{dt} &= a_{22} x_2 + a_{222} x_2^2 + a_{235} x_3 x_5; \\ \frac{dx_3}{dt} &= a_{33} x_3 + a_{34} x_4; \\ \frac{dx_4}{dt} &= a_{44} x_4 + u_1; \\ \frac{dx_5}{dt} &= a_{55} x_5 + u_2; \\ \frac{dx_6}{dt} &= a_{62} x_2 + a_{635} \frac{x_5}{x_3}. \end{aligned} \quad (9)$$

Определим возможность преобразования нелинейной системы уравнений (9) к форме Бруновского [6, 8]. Для этого определим, выполняются ли условия

инволютивности для последовательности распределений  $M^0, M^1, M^2$  [8, 10].  
С системой дифференциальных уравнений (9) связаны векторные поля

$$X(x) = \begin{vmatrix} f_1 = a_{12}x_2 \\ f_2 = a_{22}x_2 + a_{222}x_2^2 + a_{235}x_3x_5 \\ f_3 = a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ f_4 = a_{44}x_4 \\ f_5 = a_{55}x_5 \\ f_6 = a_{62}x_2 + a_{635}\frac{x_5}{x_3} \end{vmatrix}; \quad Y_1 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \quad Y_2 = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix},$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ .

Поскольку векторные поля  $Y_1$  и  $Y_2$  постоянны, то распределение  $M^0 = \text{span}\{Y_1, Y_2\}$  – инволютивно и  $\dim M^0 = 2$ ;  $\text{span}\{Y_1, Y_2\}$  – линейная оболочка векторов  $Y_1$  и  $Y_2$ ;  $\dim M^0$  – размерность распределения  $M^0$  [10].

Рассмотрим распределение  $M^1 = \text{span}\{Y_1, Y_2, L_X Y_1, L_X Y_2\}$ , где  $L_X Y_1$  и  $L_X Y_2$  – производные Ли вдоль векторного поля  $X$  векторных полей  $Y_1$  и  $Y_2$ :

$$L_X Y_1 = [X, Y_1] = \frac{\partial Y_1}{\partial x} X - \frac{\partial X}{\partial x} Y_1 = -\frac{\partial X}{\partial x} Y_1 =$$
$$= - \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} & \frac{\partial f_1}{\partial x_5} & \frac{\partial f_1}{\partial x_6} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} & \frac{\partial f_2}{\partial x_5} & \frac{\partial f_2}{\partial x_6} \\ ..... \\ \frac{\partial f_6}{\partial x_1} & \frac{\partial f_6}{\partial x_2} & \frac{\partial f_6}{\partial x_3} & \frac{\partial f_6}{\partial x_4} & \frac{\partial f_6}{\partial x_5} & \frac{\partial f_6}{\partial x_6} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -a_{33} \\ -a_{44} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix};$$
$$L_X Y_2 = [X, Y_2] = \frac{\partial Y_2}{\partial x} X - \frac{\partial X}{\partial x} Y_2 = -\frac{\partial X}{\partial x} Y_2 = \left| 0, -a_{235}x_3, 0, 0, -a_{55}, -\frac{a_{635}}{x_3} \right|^T.$$

Для инволютивности распределения  $M^1$  необходимо выполнение условия  $\text{rank}(Y_1, Y_2, L_X Y_1, L_X Y_2, [X_i, X_j]) = 4$ , где  $X_i, X_j$  – векторные поля из семейства  $(Y_1, Y_2, L_X Y_1, L_X Y_2)$ . Поскольку  $[L_X Y_1, L_X Y_2] = \frac{\partial(L_X Y_2)}{\partial x} L_X Y_1 -$

$$-\frac{\partial(L_X Y_1)}{\partial x} L_X Y_2 = \frac{\partial(L_X Y_2)}{\partial x} \begin{vmatrix} 0, 0, -a_{33}, -a_{44}, 0, 0 \end{vmatrix}^T = \begin{vmatrix} 0, a_{33}a_{235}, 0, 0, 0, -\frac{a_{33}a_{635}}{x_3^2} \end{vmatrix}^T,$$

то ранг матрицы  $R = (Y_1, Y_2, L_X Y_1, L_X Y_2, [L_X Y_1, L_X Y_2])$  равен пяти.

В связи с этим распределение  $M^1$  не является инволютивным. Для определения канала, в который необходимо вводить интегратор, проверим инволютивность подраспределений  $M_1^1 = \text{span}\{Y_1, Y_2, L_X Y_1\}$  и  $M_2^1 = \text{span}\{Y_1, Y_2, L_X Y_2\}$ . Очевидно, что  $[Y_1, Y_2] = [Y_1, L_X Y_1] = [0, 0, 0, 0, 0, 0]$ .

Имеем также,  $[Y_2, L_X Y_1] = \frac{\partial(L_X Y_1)}{\partial x} Y_2 - \frac{\partial Y_2}{\partial x} L_X Y_1 = [0, 0, 0, 0, 0, 0]$ ;

$[Y_1, L_X Y_2] = \frac{\partial(L_X Y_2)}{\partial x} Y_1 - \frac{\partial Y_1}{\partial x} L_X Y_2 = \frac{\partial(L_X Y_2)}{\partial x} Y_1 = [0, 0, 0, 0, 0, 0]$ . Поэтому оба

распределения  $M_1^1$  и  $M_2^1$  являются инволютивными и имеют одинаковую размерность, равную трем. Таким образом интегратор или дополнительную переменную можно вводить в любой канал. Однако, как показывают вычисления, один интегратор не позволяет решить проблему получения необходимого числа инволютивных распределений для расширенной системы. В расширенной системе распределение  $M^1$  становится инволютивным, однако распределение  $M^2$  уже не является инволютивным. Поэтому введем во вторую подсистему уравнений два интегратора.

Обозначим  $u_1^* = u_1$  и введем дополнительные фазовые координаты  $x_7$  и  $x_8$  в канал, связанный со вторым управлением  $u_2$ :  $x_7 = u_2$ ,  $\frac{dx_7}{dt} = x_8$ ,  $\frac{dx_8}{dt} = u_2^*$ . С расширенной моделью объекта управления связаны векторные поля:

$$X^*(x^*) = \begin{vmatrix} a_{12}x_2 \\ a_{22}x_2 + a_{222}x_2^2 + a_{235}x_3x_5 \\ a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \\ a_{44}x_4 \\ a_{55}x_5 + x_7 \\ a_{62}x_2 + a_{635}\frac{x_5}{x_3} \\ x_8 \\ 0 \end{vmatrix}; \quad Y_1^* = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}; \quad Y_2^* = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix},$$

Для расширенной модели объекта управления распределение  $M^{0*} = \text{span}\{Y_1^*, Y_2^*\}$  – инволютивно и  $\dim M^{0*} = 2$ .

Поскольку

$$L_{X^*} Y_1^* = [X^*, Y_1^*] = \frac{\partial Y_1^*}{\partial x^*} X^* - \frac{\partial X^*}{\partial x^*} Y_1^* = |0, 0, -a_{34}, -a_{44}, 0, 0, 0, 0|^T;$$

$$L_{X^*} Y_2^* = [X^*, Y_2^*] = \frac{\partial Y_2^*}{\partial x^*} X^* - \frac{\partial X^*}{\partial x^*} Y_2^* = -\frac{\partial X^*}{\partial x^*} Y_2^* = |0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -1 \ 0|^T,$$

распределение  $M^{1*} = \text{span}\{Y_1^*, Y_2^*, L_{X^*} Y_1^*, L_{X^*} Y_2^*\}$  также инволютивно, поскольку оно образовано векторами с постоянными компонентами, при этом  $m_1 = \dim M^{1*} = 4$ .

Проверим распределение  $M^{2*} = \text{span}\{M^{1*}, [X^*, M^{1*}]\} = \text{span}\{Y_1^*, Y_2^*, L_{X^*} Y_1^*, L_{X^*} Y_2^*, L_{X^*}^2 Y_1^*, L_{X^*}^2 Y_2^*\}$ . Имеем:

$$L_{X^*}^2 Y_1^* = [X^*, L_{X^*} Y_1^*] = \frac{\partial(L_{X^*} Y_1^*)}{\partial x^*} X^* - \frac{\partial X^*}{\partial x^*} L_{X^*} Y_1^* =$$

$$= \left| 0, a_{34}a_{235}x_5, a_{33}a_{34} + a_{34}a_{44}, a_{44}^2, 0, -\frac{a_{34}a_{635}x_5}{x_3^2}, 0, 0 \right|^T;$$

$$L_{X^*}^2 Y_2^* = [X^*, L_{X^*} Y_2^*] = \frac{\partial(L_{X^*} Y_2^*)}{\partial x^*} X^* - \frac{\partial X^*}{\partial x^*} L_{X^*} Y_2^* = |0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0|^T.$$

$$\text{Поскольку } [L_{X^*}^2 Y_1^*, L_{X^*}^2 Y_2^*] = \frac{\partial(L_{X^*}^2 Y_2^*)}{\partial x^*} L_{X^*}^2 Y_1^* - \frac{\partial(L_{X^*}^2 Y_1^*)}{\partial x^*} L_{X^*}^2 Y_2^* =$$

$$= \left| 0, -a_{34}a_{235}, 0, 0, 0, \frac{a_{34}a_{635}}{x_3^2}, 0, 0 \right|^T \text{ и ранг матрицы } R_2 = (Y_1^*, Y_2^*, L_{X^*} Y_1^*,$$

$L_{X^*} Y_2^*, L_{X^*}^2 Y_1^*, L_{X^*}^2 Y_2^*, [L_{X^*}^2 Y_1^*, L_{X^*}^2 Y_2^*])$  не равен 6, то распределение  $M^{2*}$  не является инволютивным. Так как динамическая линеаризация при наличии двух управлений возможна при наличии инволютивности более простых распределений – подраспределений  $M_1^{2*} = \text{span}\{Y_1^*, Y_2^*, L_{X^*} Y_1^*, L_{X^*}^2 Y_1^*\}$ ,

$M_2^{2*} = \text{span}\{Y_1^*, Y_2^*, L_{X^*} Y_2^*, L_{X^*}^2 Y_2^*\}$ , то проверим их инволютивность.

Подраспределение  $M_1^{2*}$  не является инволютивным, поскольку  $[L_{X^*} Y_1^*, L_{X^*}^2 Y_1^*] \neq [0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^T$ . Распределение  $M_2^{2*}$  инволютивно, поскольку все его вектора имеют постоянные компоненты.

Исследуем распределение  $M_2^{3*} = \text{span}\{Y_1^*, Y_2^*, L_{X^*} Y_2^*, L_{X^*}^2 Y_2^*, L_{X^*}^3 Y_2^*\}$ .

Имеем:

$$\begin{aligned} L_{X^*}^3 Y_2^* &= [X^*, L_{X^*}^2 Y_2^*] = \frac{\partial(L_{X^*}^2 Y_2^*)}{\partial x^*} X^* - \frac{\partial X^*}{\partial x^*} L_{X^*}^2 Y_2^* = -\frac{\partial X^*}{\partial x^*} L_{X^*}^2 Y_2^* = \\ &= \left| 0, a_{235}x_3, 0, 0, a_{55}, \frac{a_{635}}{x_3}, 0, 0 \right|^T; \\ [L_{X^*}^2 Y_2^*, L_{X^*}^3 Y_2^*] &= \frac{\partial(L_{X^*}^3 Y_2^*)}{\partial x^*} L_{X^*}^2 Y_2^* - \frac{\partial(L_{X^*}^2 Y_2^*)}{\partial x^*} L_{X^*}^3 Y_2^* = \frac{\partial(L_{X^*}^3 Y_2^*)}{\partial x^*} L_{X^*}^2 Y_2^* = \\ &= |0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0|^T; \\ [L_{X^*} Y_2^*, L_{X^*}^3 Y_2^*] &= \frac{\partial(L_{X^*}^3 Y_2^*)}{\partial x^*} L_{X^*} Y_2^* - \frac{\partial(L_{X^*} Y_2^*)}{\partial x^*} L_{X^*}^3 Y_2^* = |0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0|^T; \\ [Y_1^*, L_{X^*}^3 Y_2^*] &= [Y_2^*, L_{X^*}^3 Y_2^*] = |0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0|^T. \end{aligned}$$

Таким образом, распределение  $M_2^{3*}$  – инволютивно. На основе теории о линейных эквивалентах для нелинейных аффинных систем с двумя управлениями [10] получаем, что индексы управляемости  $k_1$  и  $k_2$  для рассматриваемого объекта управления одинаковы  $k_1 = k_2 = 4$  и каноническая форма Бруновского имеет две клетки. Поскольку число рассматриваемых инволютивных распределений  $M_j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, k_{\max} - 1$ , где  $k_{\max}$  – максимальный индекс управляемости, для данного объекта равен четырём, то условия для получения линейного эквивалента для рассматриваемого объекта выполнены. В результате получим математическую модель в форме Бруновского:

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= y_{i+1}, \quad i = 1, 2, 3, 5, 6, 7; \\ \frac{dy_i}{dt} &= v_k, \quad i = 4, 8; \quad k = i/4. \end{aligned} \tag{10}$$

Поскольку модель объекта в форме Бруновского имеет две клетки, то необходимо определить две функции преобразования  $T_1(x^*)$  и  $T_2(x^*)$  от расширенной модели объекта управления к модели в форме Бруновского. Известно [8, 10], что также функции  $y_1 = T_1(x^*)$ ,  $y_2 = T_2(x^*)$  существуют и из них путем последовательного дифференцирования вдоль векторного поля  $X_1 = X^* + u_1^* Y_1^* + u_2^* Y_2^*$  можно определить  $y_2, y_3, y_4, y_6, y_7, y_8$ .

В рассматриваемой задаче

$$\begin{aligned}
y_1 &= T_1(\mathbf{x}^*) = x_1; \\
y_2 &= L_{X^*} T_1(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial T_1(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} X_i^* = a_{12} x_2; \\
y_3 &= L_{X^*} (L_{X^*} T_1(\mathbf{x}^*)) = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial (L_{X^*} T_1(\mathbf{x}^*))}{\partial x_i} X_i^* = a_{12} (a_{22} x_2 + a_{222} x_2^2 + a_{235} x_3 x_5); \\
y_4 &= L_{X^*} (L_{X^*}^2 T_1(\mathbf{x}^*)) = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial (L_{X^*}^2 T_1(\mathbf{x}^*))}{\partial x_i} X_i^* = a_{12} (a_{22} + 2a_{222} x_2) (a_{22} x_2 + a_{222} x_2^2 + \\
&\quad + a_{235} x_3 x_5) + a_{12} a_{235} x_5 (a_{33} x_3 + a_{34} x_4) + a_{12} a_{235} x_3 (a_{55} x_5 + x_7); \\
y_5 &= T_2(\mathbf{x}^*) = x_5; \\
y_6 &= L_{X^*} T_2(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial T_2(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} X_i^* = a_{55} x_5 + x_7; \\
y_7 &= L_{X^*} (L_{X^*} T_2(\mathbf{x}^*)) = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial (L_{X^*} T_2(\mathbf{x}^*))}{\partial x_i} X_i^* = a_{55} (a_{55} x_5 + x_7) + x_8; \\
y_8 &= L_{X^*} (L_{X^*}^2 T_2(\mathbf{x}^*)) = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial (L_{X^*}^2 T_2(\mathbf{x}^*))}{\partial x_i} X_i^* = a_{55} (a_{35} a_{55} x_5 + a_{35} x_7 + x_8).
\end{aligned}$$

На рис. 1 и 2 приведены процессы, полученные с помощью математических моделей (9) и (10).

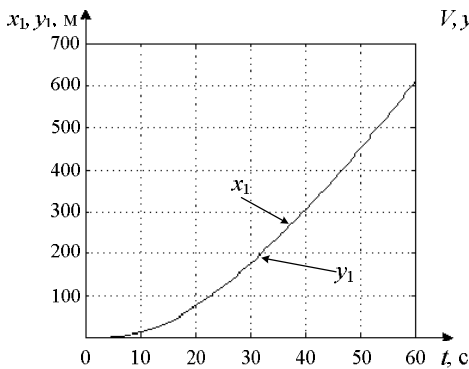


Рис. 1. Поведение переменных  $x_1$  и  $y_1$  во времени.

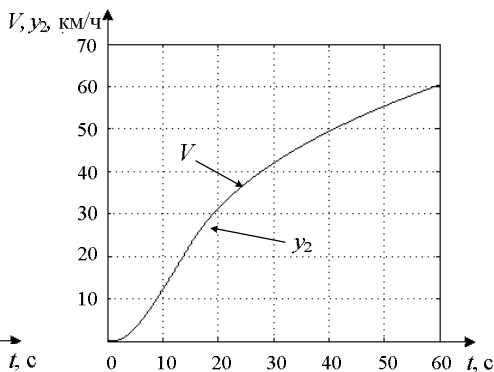


Рис. 2. Поведение переменных  $V$  и  $y_2$  во времени.

На рис. 1 с помощью переменных  $x_1$  (модель (9)) и  $y_1$  (модель (10)) показано изменение во времени пройденного дизель-поездом расстояния при разгоне состава до 60 км/ч на ровном участке железнодорожного пути. Как следует из рисунка,  $x_1 \equiv y_1$ . На рис. 2 показаны изменения скорости дизель-



поезда, полученные с помощью модели (9), переменная  $V$ , и модели (10), переменная  $y_2$ . как видно из рисунка  $V \equiv y_2$ . Аналогичные тождества выполняются и для других переменных моделей (9) и (10). Таким образом, математическая модель в форме Бруновского эквивалентна исходной нелинейной модели (9).

**Выводы.** Впервые средствами дифференциальной геометрии получена работоспособная линейная математическая модель дизель-поезда, с тяговым асинхронным приводом, эквивалентная нелинейной математической модели, описываемой системой нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений шестого порядка. Полученная линейная модель в канонической форме Бруновского может быть использована для синтеза оптимальных законов управления тяговым подвижным составом.

**Список литературы:** 1. Бауэр Х.П. Оптимальное использование сцепления на электровозе с трехфазным тяговым приводом / Х.П. Бауэр // Железные дороги мира. – 1987. – № 8. – С. 10 – 23. 2. Ohishi K. Adhesion control of electric motor coach based on force control using disturbance observer / K. Ohishi, Y. Ogawa // IEEE, Advanced Motion Control. – April, 2000. – P. 323 – 328. 3. Омеляненко В.И. Тяговые и токовые характеристики электроподвижного состава с асинхронным тяговым двигателем / В.И. Омеляненко, Н.Н. Калужный, Т.А. Кулиш, Г.В. Кривякин // Проблемы и перспективы развития железнодорожного транспорта: Тезисы LXVI международной конференции. – Днепропетровск: ДИИТ, 2006. – С. 123. 4. Шапран Е.Н. Совершенствование микропроцессорных систем управления с высоким использованием сил сцепления / Е.Н. Шапран // Вісник НТУ "ХПИ". Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Харків: НТУ "ХПИ". – 2006. – № 23. – С. 145 – 154. 5. Носков В.И. Моделирование и оптимизация систем управления и контроля локомотивов / В.И. Носков, В.Д. Дмитриенко, Н.И. Заполовский, С.Ю. Леонов. – Х.: ХФИ "Транспорт Украины", 2003. – 248 с. 6. Дмитриенко В.Д. Синтез оптимальных законов управления тяговым электроприводом методами дифференциальной геометрии и принципа максимума / В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный // Системи обробки інформації. – Харків: ХУПС. – 2009. – Вип. 4 (78). – С. 42–51. 7. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-ти томах. Т. 4: Теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егунова. – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 744 с. 8. Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и томах. Т. 5: Методы современной теории управления / Под ред. К.А. Пупкова, Н.Д. Егунова. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. – 784 с. 9. Дмитриенко В.Д. Линеаризация математической модели привода методами дифференциальной геометрии / В.Д. Дмитриенко, А.Ю. Заковоротный // Вісник НТУ "ХПИ". Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Харків: НТУ "ХПИ". – 2007. – № 19. – С. 64 – 77. 10. Краснощченко В.И. Нелинейные системы: геометрический метод анализа и синтеза / В.И. Краснощченко, А.П. Грищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана. – 2005. – 520 с.

УДК 621.9.01

**Лінеаризація нелінійної математичної моделі дизель-поїзда з тяговим асинхронним приводом методами геометричної теорії керування / Дмитрієнко В.Д., Заковоротний О.Ю., Мезенцев М.В. // Вісник НТУ "ХПИ". Тематичний випуск: Інформатика і моделювання. – Харків: НТУ "ХПИ". – 2010. – № 21. – С. 66 – 75.**

Розглядається синтез лінійної математичної моделі дизель-поїзда з тяговим асинхронним приводом на основі динамічної лінеаризації моделі об'єкта керування засобами геометричної теорії управління. На підставі послідовності інволютивних розподілів отримана лінійна математична модель у формі Бруновського. Приводиться порівняння процесів у вихідній і отриманій лінійній системі, що підтверджує правильність виконаних перетворень. Іл.: 2. Бібліогр.: 10 назв.

**Ключові слова:** лінійна математична модель, тяговий асинхронний привод, геометрична теорія управління, інволютивні розподіли.

UDC 621.9.01

**Linearization of nonlinear mathematical model diesel train with asynchronous traction drive with using methods of geometric control theory / Dmitrienko V.D., Zakovorotnyi A.Y., Mezentsev N.V.** // Herald of the National Technical University "KhPI". Subject issue: Information Science and Modelling. – Kharkov: NTU "KhPI". – 2010. – №. 21. – P. 66 – 75.

A synthesis of linear mathematical model diesel train with asynchronous traction drive based on dynamic object model linearization control of the means of geometric control theory. Based on the sequence of involutive transformations received linear mathematical model in the form of Brunovski. A comparison of processes in the source and received linear system, which confirms the correctness of transformations performed. Figs: 2. Refs: 10 titles.

**Keywords:** linear mathematical model, asynchronous traction drive, geometric control theory, involutive transformations.

*Поступила в редакцію 10.05.2010*